

《基于带隙阻波隔振的超材料梁吸隔振一体化设计方法》 的补充材料

魏巍¹⁾ 管峰²⁾ 方鑫^{1)†}

1) (国防科技大学智能科学学院, 长沙 410073)

2) (海军研究院, 北京 100161)

补充材料 A

对于整个系统的动力学方程可以表述成 $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}$ 。其中 \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{C} 为质量、刚度、阻尼矩阵, \mathbf{q} 表示广义坐标, \mathbf{f} 表示载荷矢量。对于广义坐标 \mathbf{q} 可以表示成 $\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}}e^{i\omega t}$ 。

$$\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{f}, \quad (\text{A1})$$

其中 $\mathbf{D} = \mathbf{K} - (2\pi f)^2 \mathbf{M} + i(2\pi f)\mathbf{C}$ 。动刚度矩阵 \mathbf{D} 可以分为左、中、右 3 个部分, 如下式:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{LL} & \tilde{\mathbf{D}}_{LI} & \tilde{\mathbf{D}}_{LR} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{IL} & \tilde{\mathbf{D}}_{II} & \tilde{\mathbf{D}}_{IR} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{RL} & \tilde{\mathbf{D}}_{RI} & \tilde{\mathbf{D}}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_L \\ q_I \\ q_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_L \\ 0 \\ f_R \end{bmatrix}. \quad (\text{A2})$$

可以简化成:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{LL} - \tilde{\mathbf{D}}_{LI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IL} & \tilde{\mathbf{D}}_{LR} - \tilde{\mathbf{D}}_{LI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IR} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{RL} - \tilde{\mathbf{D}}_{RI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IL} & \tilde{\mathbf{D}}_{RR} - \tilde{\mathbf{D}}_{RI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_L \\ q_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_L \\ f_R \end{bmatrix}. \quad (\text{A3})$$

写作:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_L \\ q_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_L \\ f_R \end{bmatrix}. \quad (\text{A4})$$

根据 Bloch 定理, 其边界条件和载荷条件可以写作:

$$q_R = e^{\mu} q_L, \quad f_R = -e^{\mu} f_L, \quad (\text{A5})$$

其中 $\mu = -ika$, a 为元胞中梁的长度。

简化成特征值的形式, 即

$$\left| \mathbf{D}_{RL} + (\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR})e^{\mu} + \mathbf{D}_{LR}e^{2\mu} \right| = 0. \quad (\text{A6})$$

补充材料 B

$$\mathbf{K}_{\text{iso}} = \begin{pmatrix} 2k_1+k_2 & -k_2 & -k_1 & & & & & & & \\ -k_2 & k_2 & & & & & & & & \\ -k_1 & & 2k_1+k_2 & -k_2 & -k_1 & & & & & \\ & & -k_2 & k_2 & & & & & & \\ & & -k_1 & & 2k_1+k_2 & -k_2 & -k_1 & & & \\ & & & & -k_2 & k_2 & & & & \\ & & & & -k_1 & & 2k_1+k_2 & -k_2 & -k_1 & \\ & & & & & & -k_2 & k_2 & & \\ & & & & & & & & 2k_1+k_2 & -k_2 \\ & & & & & & & & -k_2 & k_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{\text{iso}} = \begin{pmatrix} m_1 & & & & & & & & & \\ & m_2 & & & & & & & & \\ & & m_1 & & & & & & & \\ & & & m_2 & & & & & & \\ & & & & m_1 & & & & & \\ & & & & & m_2 & & & & \\ & & & & & & m_1 & & & \\ & & & & & & & m_2 & & \\ & & & & & & & & m_1 & \\ & & & & & & & & & m_2 \end{pmatrix},$$

式中, \mathbf{K}_{iso} 和 \mathbf{M}_{iso} 分别代表波阻隔振器离散模型的刚度矩阵和质量矩阵。其中奇数位自由度代表弹性结构(m_1-k_1), 偶数位自由度代表局域振子(m_2-k_2)。

由(A5)式计算特征频率, 结果如图 S1(a)所示, 其前四阶与后四阶特征频率分布有着极大差别。前四阶逐步逼近 f_{iso} , 而后四阶则近似成线性增大。

由(A5)式计算的特征向量, 结果如图 S1(b)所示。通过图 S1(b)可知, 前四阶模态的局域振子 m_2-k_2 的归一化位移明显大于弹性结构 m_1-k_1 的位移, 后四阶则恰好相反。这说明前四阶模态由局域振子 m_2-k_2 激发, 后四阶模态由弹性结构 m_1-k_1 激发。

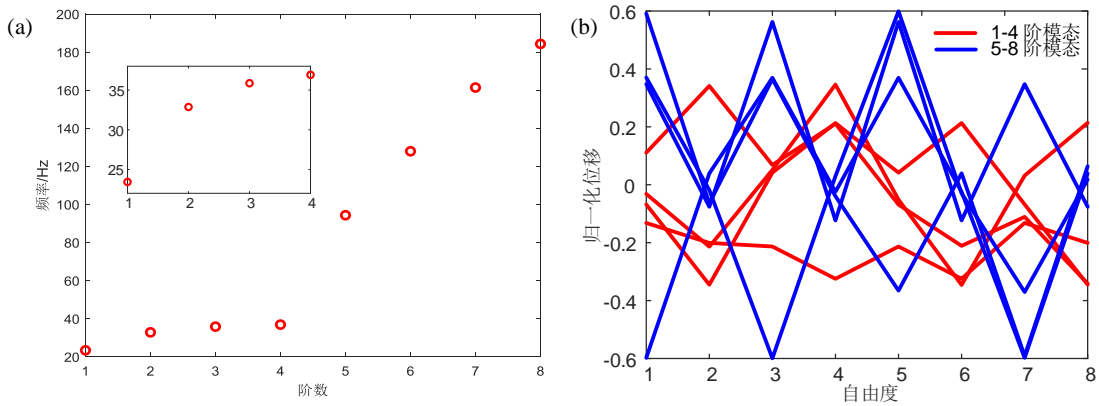


图 S1 波阻隔振器离散模型的 8 阶特征频率和模态向量

Fig.S1. The 8th order characteristic frequency and modal vector of the discrete model of the wave barrier oscillator.

补充材料 C

波阻隔振器的多模态共振所产生的横向 LR 带隙的特征频率显然刚度矩阵 \mathbf{K}_{iso} 和质量矩阵 \mathbf{M}_{iso} 决定。为了分析刚度矩阵 \mathbf{K}_{iso} 中参数 k_1 和 k_2 对于特征频率的影响，保持质量矩阵 \mathbf{M}_{iso} 不变， k_1 和 k_2 可以分别用 f_0 和 f_{iso} 表示，如(C1)式所示：

$$k_1 = 5M(2\pi f_0)^2, \quad k_2 = M\beta \frac{r}{1+r} (2\pi f_{\text{iso}})^2. \quad (\text{C1})$$

对于 LR 带隙起始频率， f_0 从 5 增至 15， f_{iso} 从 30 变化到 60，计算第 1 阶和第 4 阶的特征频率，结果如图 2(a)所示， f_0 和 f_{iso} 分别增大时，带隙起始频率也随之增大。此外， f_0 越大，第四阶 LR 带隙频率越接近 f_{iso} 。

对于 LR 带隙宽度，保持 $r = 20$ ， $\beta = 1$ ， $a = 3000 \text{ mm}$ ，计算 f_0 从 8 Hz 变化至 15 Hz 的 LR 带隙，结果如 S2(b)所示，随着 f_0 增大，LR 带隙的宽度也随之增大。

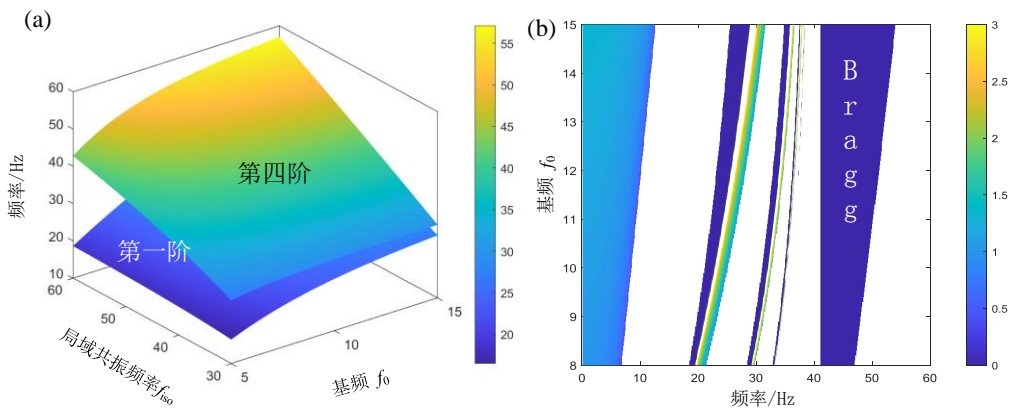


图 S2 单层支撑刚度 k_1 和局域共振频率 f_{iso} 对于纵向 LR 带隙的影响规律 (a) LR 带隙起始频率；(b) LR 带隙宽度

Fig.S2. Influence of single-layer support stiffness k_1 and local resonance frequency f_{iso} on the longitudinal LR bandgap: (a) Starting frequency of the LR bandgap; (b) width of the LR bandgap.